

## Η ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ Η ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΝΑ ΤΙΣ ΧΕΙΡΙΣΤΟΥΝ

*Χαράλαμπος Λεμονίδης*

*Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης*

*Περίληψη.* Στη διδασκαλία των μαθηματικών, αλλά και σε πολλά άλλα αντικείμενα της εκπαίδευσης, είναι πολύ συχνό το φαινόμενο της παρουσίασης της ίδιας έννοιας με διάφορους τρόπους αναπαράστασης. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να είναι ικανοί όχι μόνο να αναγνωρίζουν και να αξιολογούν τις διάφορες αναπαραστάσεις των εννοιών αλλά και να τις χειρίζονται στις διαδικασίες της διδασκαλίας. Στο άρθρο αυτό, αρχικά, πραγματοποιούμε μια ανάλυση των διαφορετικών αναπαραστάσεων με τις οποίες είναι δυνατόν να παρουσιαστούν οι αριθμητικές ποσότητες. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια έρευνα που έγινε με 42 φοιτητές του Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης προκειμένου να εξετάσουμε τις ικανότητές τους να αξιολογούν και να χειρίζονται τις διάφορες αναπαραστάσεις των αριθμητικών ποσοτήτων σε καταστάσεις που παρουσιάζονται συνήθως στη διδασκαλία. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι οι φοιτητές/τριες παρουσιάζουν σοβαρές αδυναμίες στο χαρακτηρισμό και χειρισμό αυτών των αναπαραστάσεων.

*Λέξεις κλειδιά:* Αναπαραστάσεις, Αριθμητικές ποσότητες, Εκπαίδευση υποψήφιων δασκάλων.

*Διεύθυνση:* Χαράλαμπος Λεμονίδης, Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Παιδαγωγική Σχολή Φλώρινας, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 531 00 Φλώρινα. E-mail: lemonidi@eled-fl.auth.gr

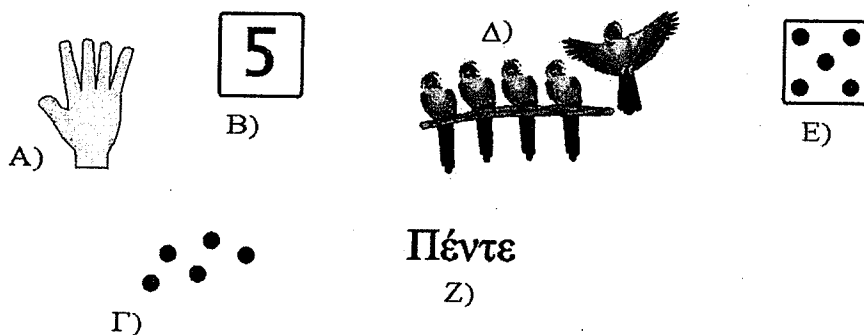
## Εισαγωγή

Για να πραγματοποιηθεί η επικοινωνία κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, οι διάφορες έννοιες παρουσιάζονται με αναπαραστάσεις οι οποίες πολλές φορές είναι σημειωτικά διαφορετικές. Αυτή η διαφορετική σημειωτική παρουσίαση, όμως, δημιουργεί διαφοροποιήσεις στη μάθηση από την πλευρά των μαθητών (Duvall, 1988. Lemonidis, 1991).

Ειδικότερα, όσον αφορά τις αναπαραστάσεις, ένας διαχωρισμός που μπορεί να γίνει είναι ανάμεσα στα *εξωτερικά* συστήματα αναπαράστασης και στα *εσωτερικά* ψυχολογικά συστήματα αναπαράστασης που διαθέτουν οι άνθρωποι. Τα εξωτερικά συστήματα εκκείνονται από τα συμβατικά συμβολικά συστήματα των μαθηματικών (όπως το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, οι φορμαλιστικοί αλγεβρικοί συμβολισμοί, οι μιγαδικοί αριθμοί, κ.τ.λ.) μέχρι τα δομημένα μαθησιακά περιβάλλοντα (για παράδειγμα, αυτά που εμπλέκουν υλικά αντικείμενα ή μικρόκοσμους του υπολογιστή). Τα εσωτερικά συστήματα αναπαράστασης, από την άλλη, εμπριέχουν τις προσωπικές συμβολικές κατασκευές των μαθητών και τη σημασία των μαθηματικών συμβόλων, καθώς επίσης τη φυσική γλώσσα, τη νοερή εικονική αναπαράσταση και την αναπαράσταση του χώρου, τις στρατηγικές στη λύση προβλημάτων και την ευρετική (Goldin & Shteingold, 2001).

Ο Piaget (1951) κάνει το διαχωρισμό μεταξύ δύο ειδών αναπαράστασης: τα *σύμβολα*, όπως είναι οι εικόνες και οι μάρκες μέτρησης, και τα *σημεία*, όπως είναι οι λέξεις και τα γραπτά ψηφία. Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στον όρο “σύμβολο” και στον όρο “σημείο”. Ένα σύμβολο είναι ένα σημαίνον που έχει μια σχηματική ομοιότητα με το σημαινόμενο [π.χ., τα πέντε παπαγαλάκια (Δ) ή το ζάρι (Ε) και οι πέντε τελείες σε τυχαία διάταξη (Γ) στην Εικόνα 1] και το οποίο μπορεί να ανακαλυφθεί από το παιδί. Κατά συνέπεια, τα σύμβολα δεν είναι απαραίτητο να διδαχθούν. Ένα σημείο, αντιθέτως, είναι ένα συμβατικό σημαίνον [π.χ., η λέξη «πέντε» (Ζ) και το γραφικό σημείο «5» (Β) στην Εικόνα 1). Τα σημεία δεν παρουσιάζουν καμία ομοιότητα με το σημαινόμενο και ανήκουν σε συστήματα που έχουν ανακαλυφθεί για να επικοινωνούμε μεταξύ μας. Έτσι η λέξη “πέντε” και το ψηφίο “5” είναι σημεία που μαθαίνονται είτε στην κοινω- νία είτε στο σχολείο.

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις,



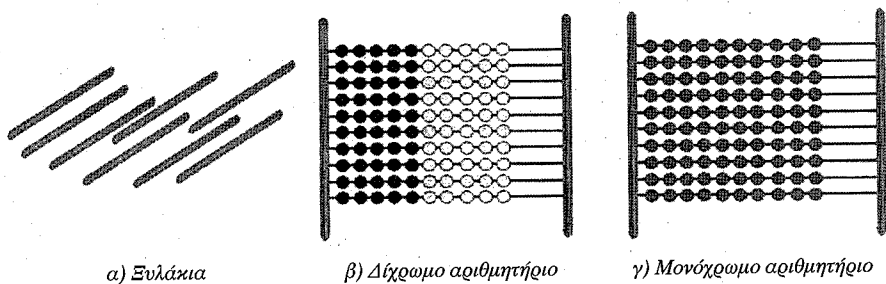
Εικόνα 1: Διάφοροι τρόποι αναπαράστασης του αριθμού πέντε.

με τη μορφή συμβόλων ή σημείων, που χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση των αριθμητικών ποσοτήτων στην αρχή της μάθησης των αριθμητικών εννοιών. Αρχικά θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε και να αναλύσουμε τις διάφορες αναπαραστάσεις, όπως αυτές χρησιμοποιούνται συνήθως στο σχολικό πλαίσιο για την παρουσίαση των αριθμητικών ποσοτήτων.

### ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

#### *Αντικείμενα της αρίθμησης με δομή και χωρίς δομή*

Χρησιμοποιούμε διάφορα υλικά αντικείμενα για να αναπαραστήσουμε τις ποσότητες στις διαδικασίες αρίθμησης. Ως αντικείμενα μπορούμε να θεωρήσουμε, για παράδειγμα, και τα δάκτυλα των χεριών. Μπορούμε να διαχωρίσουμε δύο κατηγορίες αντικειμένων: (α) αντικείμενα που είναι οργανωμένα σε μια δομή και (β) αντικείμενα χωρίς καμιά οργάνωση σε δομή (Lemonidis, υπό δημοσίευση). Μια συλλογή αντικειμένων θεωρείται οργανωμένη σε μια δομή όταν, εκτός από τη μοναδιαία διάκριση των στοιχείων της, μπορεί να έχει και συλλογές από περισσότερα από ένα αντικείμενα οι οποίες θεωρούνται και υπολογίζονται ως ολότητες και μονάδες μέτρησης. Για παράδειγμα, τέτοιες συλλογές αντικειμένων είναι οι πεντάδες [π.χ., τα δάκτυλα (A) στην Εικόνα 1] και οι δεκάδες [π.χ., το αριθμητήριο (β) και (γ) στην Εικόνα 2]. Μπορεί όμως να έχουμε και συλλογές με λιγότερα αντικείμενα (δύο, τρία ή τέσσερα) και η ομαδοποίηση να βασίζεται στη διαδικασία της άμεσης εκτίμησης. Οι συλλογές μπορεί να είναι και περισσότερα από 10 αντικείμενα (2 x 10, 3 x 10, 100, κ.τ.λ.), δηλαδή, δύο ή τρεις σειρές στο αριθ-



Εικόνα 2: Διάφορα εκπαιδευτικά υλικά για απαρίθμηση.

μητήριο ένα μπλοκ των 100 μονάδων κ.τ.λ. Πρέπει, όμως, στην κατηγορία των αντικειμένων που είναι οργανωμένα σε μία δομή να διαχωρίσουμε εκείνα τα αντικείμενα, όπως το αριθμητήριο, που είναι εργαλεία που επιδέχονται εξωτερικούς χειρισμούς και υπολογισμούς (με μετατόπιση ή αναδιοργάνωση) από εκείνα, όπως το ζάρι, που δεν επιδέχονται χειρισμούς. Η πρώτη ομάδα αντικειμένων, στην οποία ανήκει το αριθμητήριο, είναι μερικώς ισόμορφη με ένα σύστημα αρίθμησης με έναν αριθμό από μπίλιες ανά γραμμή (ισοδύναμη σε μια βάση  $n$ ). Τα ζάρια, αντιθέτως, ευνοούν την άμεση εκτίμηση μιας συλλογής στοιχείων.

Με τον όρο “παρουσίαση με υλικά” στη συνέχεια θα εννοούμε τις καταστάσεις εκείνες στις οποίες χρησιμοποιούμε υλικά αντικείμενα για να παρουσιάσουμε τις αριθμητικές ποσότητες. Στην κατηγορία αυτή συμπεριλαμβάνονται και τα δάκτυλα των χεριών όταν χρησιμοποιούνται στην αρίθμηση. Αυτά τα αντικείμενα συνήθως αποτελούν τα αντικείμενα της απαρίθμησης. Τα αντικείμενα της απαρίθμησης, όπως είδαμε και παραπάνω, μπορεί να είναι με οργανωμένη δομή ή χωρίς οργανωμένη δομή. Αντικείμενα με οργανωμένη μορφή μπορεί να είναι το αριθμητήριο, τα ζάρια, τα κυβάκια λέγγο, κ.τ.λ. Αντικείμενα χωρίς οργανωμένη μορφή μπορεί να είναι τα ξυλάκια [(α) στην Εικόνα 2] ή οποιαδήποτε ασύνδετα μεταξύ τους αντικείμενα χρησιμοποιούμε στην αρίθμηση.

Οι μαθητές, με τη διαδικασία της άμεσης εκτίμησης, βρίσκουν γρήγορα και αποδίδουν άμεσα τον πληθάρημο σε ποσότητες οι οποίες παρουσιάζονται με οργανωμένη μορφή, όπως το ζάρι. Αντίθετα, σε μια ποσότητα η οποία παρουσιάζεται με μη οργανωμένη μορφή [βλέπε κουνίδες (Γ) στην Εικόνα 1] οι μαθητές είναι αναγκασμένοι να πραγματοποιήσουν την απαρίθμηση προκειμένου να βρουν τον πληθάρημο (Λεμονίδης, 1994. Mandler & Shebo, 1982). Ωστόσο το αριθμητήριο (βλέπε αριθμητήριο (β) και (γ) στην Εικόνα 2], και μάλιστα το δίχρωμο, δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές

να χρησιμοποιούν επιπλέον τις πενταδικές και δεκαδικές δομές ως σημεία αναφοράς. Αυτός ο τρόπος δόμησης βοηθά στην ανακάλυψη και απομνημόνευση αριθμητικών σχέσεων όπως “το 13 είναι δέκα και τρία” και “πέντε και ένα μας κάνει έξι”. Αντίθετα, τα υλικά χωρίς δομή, όπως τα ξυλάκια, επειδή δεν παρουσιάζουν κανένα σημείο αναφοράς απαιτείται πάντα η καταμέτρηση ένα προς ένα για να βρεθεί ο πληθάρηθος της ποσότητας. Τα υλικά αυτά, λοιπόν, όπως τα ξυλάκια, επειδή απαιτείται η καταμέτρηση ένα προς ένα, οδηγούν τους μαθητές να χρησιμοποιούν στους υπολογισμούς τους, χαμηλού επιπέδου διαδικασίες, όπως είναι οι αριθμητικές. (Gravenmeijer, 2000. Λεμονίδης, υπό δημοσίευση).

### ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

Ο Duvall (1999) για να διαχωρίσει και να ταξινομήσει τις διάφορες εξωτερικές αναπαραστάσεις σε κατηγορίες χρησιμοποιεί το κριτήριο της *ομοιότητας ή μη* μεταξύ του περιεχομένου της αναπαράστασης και του αντικειμένου που αναπαρίσταται. Με βάση το κριτήριο της ομοιότητας διαχωρίζει δύο μεγάλες ομάδες αναπαραστάσεων: τις εικονικές αναπαραστάσεις και τις συμβολικές αναπαραστάσεις. Σύμφωνα με την ταξινόμηση αυτή, ο όρος “συμβολικές αναπαραστάσεις” αποκτά ευρύτερη και διαφορετική σημασία από αυτήν που αναφέρεται στην εισαγωγή σχετικά με το διαχωρισμό που κάνει ο Piaget. Εμείς στη συνέχεια για να ταξινομήσουμε τις αναπαραστάσεις των αριθμητικών ποσοτήτων ακολουθούμε τη θεώρηση που κάνει ο Duvall.

*Εικονικές αναπαραστάσεις* είναι αυτές στις οποίες το περιεχόμενο της αναπαράστασης παρουσιάζει μια σχέση ομοιότητας με το αντικείμενο το οποίο αναπαρίσταται. Σε διάφορες αριθμητικές καταστάσεις παρουσιάζονται τέτοιες αναπαραστάσεις όπως είναι οι φωτογραφίες, τα σχέδια, τα σκίτσα, κ.τ.λ. Έτσι, στην εικονική αναπαράσταση υλικών αντικειμένων οι εικόνες αναπαριστούν σε φυσική υπόσταση τα αντικείμενα της αρίθμησης. Συνήθως στις εικονικές αναπαραστάσεις υπάρχει η δυνατότητα της αρίθμησης των αντικειμένων, εκτός από τις περιπτώσεις όπου κάποια αντικείμενα είναι κρυμμένα. Οι εικονικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται πολύ στη σχολική πρακτική μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια.

*Συμβολικές αναπαραστάσεις* είναι αυτές στις οποίες το περιεχόμενο της αναπαράστασης δεν παρουσιάζει καμία σχέση ομοιότητας με το αντικείμενο το οποίο αναπαρίσταται. Στην ομάδα αυτή των αναπαραστάσεων μπορούμε να διακρίνουμε δύο είδη αναπαραστάσεων. Τις αναπαραστάσεις

στις οποίες είναι δυνατή η καταμέτρηση των αντικειμένων που παρουσιάζονται, και τις αναπαραστάσεις στις οποίες δεν είναι δυνατή η καταμέτρηση των αντικειμένων.

Στις συμβολικές αναπαραστάσεις που παρέχουν δυνατότητα καταμέτρησης χρησιμοποιούμε ως αντικείμενα απαρίθμησης σύμβολα όπως κουκίδες, γραμμούλες, κ.τ.λ. Εδώ τα αντικείμενα παρουσιάζονται με μια πιο αφηρημένη μορφή από ό,τι τα ίδια τα υλικά αντικείμενα, δηλαδή, δεν παρουσιάζονται τα ειδικά χαρακτηριστικά των αντικειμένων, χρώμα, σχήμα, μέγεθος κ.τ.λ., αλλά παρουσιάζονται χαρακτηριστικά που βοηθούν στην αρίθμηση τους. Έχει σημασία εάν τα σύμβολα είναι σε οργανωμένη δομή ή σε μη οργανωμένη δομή. Παράδειγμα συμβόλων χωρίς οργανωμένη δομή είναι οι κουκίδες σε τυχαία διάταξη, ενώ με οργανωμένη μορφή είναι οι κουκίδες σε μορφή ζαριού.

Συμβολικές αναπαραστάσεις που δεν παρέχουν δυνατότητα απαρίθμησης είναι οι παρακάτω:

*Η γλωσσική αναπαράσταση.* Χρησιμοποιούμε τις γλωσσικές εκφράσεις για να εκφράσουμε τις αριθμητικές ποσότητες. Αυτές οι εκφράσεις μπορεί να είναι προφορικές ή γραπτές. Για παράδειγμα, προφορικές εκφράσεις είναι τα φωνήματα των αριθμών (αριθμοί-λέξεις), ή η απαγγελία της ακολουθίας των αριθμών. Γραπτές γλωσσικές αριθμητικές αναπαραστάσεις μπορεί να είναι οι γραπτοί αριθμοί-λέξεις (πέντε). Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι η φυσική γλώσσα, στην οποία χρησιμοποιούνται και οι γλωσσικές εκφράσεις, είναι ένα εύκολο μέσο επικοινωνίας το οποίο διαθέτουν τα παιδιά από πολύ νωρίς. Από πολύ νωρίς, επομένως, τα παιδιά μπορούν να εκφράζουν και να επικοινωνούν προφορικά με τους αριθμούς-λέξεις.

*Η αναπαράσταση μέσω των ψηφίων.* Εδώ οι αριθμητικές ποσότητες αναπαρίστανται με ψηφία, και το σημαίνον της ποσότητας δεν έχει καμία σχέση με το σημαινόμενο, όπως και με τη γλωσσική αναπαράσταση. Συνήθως οι αριθμοί με ψηφία παρουσιάζονται γραπτά.

Με βάση την παραπάνω παρουσίαση των διάφορων τύπων αναπαράστασης μπορούμε να πούμε ότι οι ποσότητες που εκφράζουμε μέσα από αριθμούς και συμμετέχουν στις αριθμητικές πράξεις μπορούν να παρουσιαστούν με απτά υλικά, με εικονικές αναπαραστάσεις, και με συμβολικές αναπαραστάσεις. Υπάρχουν πολλές έρευνες που εξετάζουν την επίδραση αυτών των εξωτερικών αναπαραστάσεων των αριθμητικών εννοιών στη συμπεριφορά των μαθητών (Cucero & Curcio, 2001. Janvier, 1987). Κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων μια εικονική αναπαράσταση (εικόνα, σχήμα, διάγραμμα κ.λπ.), από τη μια, συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση

του προβλήματος, μέσα από μια συνοπτική παρουσίαση της πληροφορίας και, από την άλλη, προδιαγράφει τα ενδιαμέσα βήματα της σκέψης του λύτη διευκολύνοντας με αυτόν τον τρόπο διαδικασίες ελέγχου και επαλήθευσης (Bruning, Schraw, & Ronning, 1999). Ένα πρόβλημα με την ίδια σημασιολογική δομή μπορεί να παρουσιαστεί με διάφορους τρόπους: με μια γραπτή ή προφορική εκφώνηση, με μια εικονογραφημένη εκφώνηση, με ή χωρίς υλικά αντικείμενα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τα παιδιά κ.λπ. Οι μεταβολές αυτές στον τρόπο παρουσίασης των προβλημάτων επηρεάζουν τη συμπεριφορά των μαθητών και ιδιαίτερα των μαθητών μικρής ηλικίας (Moyer, Sowder, Theradgill-Sowder, & Moyer 1984. Riley, 1981).

Δεν υπάρχουν όμως έρευνες, απ' όσο γνωρίζουμε, οι οποίες να εξετάζουν την ικανότητα των υποψήφιων δασκάλων να χειρίζονται τις εξωτερικές αναπαραστάσεις στις αριθμητικές έννοιες. Σκοπός της εργασίας αυτής ήταν να πραγματοποιήσει μια αρχική έρευνα σε υποψήφιους δασκάλους προκειμένου να εξετάσει το βαθμό στον οποίο γνωρίζουν και αξιολογούν την επίδραση που ασκούν οι διάφορες αριθμητικές αναπαραστάσεις στη συμπεριφορά των μαθητών. Πιο συγκεκριμένα, τα ερωτήματα της έρευνας αυτής ήταν τα ακόλουθα:

## Η ΕΡΕΥΝΑ

Τα κύρια ερωτήματα που τίθενται στην εργασία αυτή σχετικά με τις ικανότητες των υποψήφιων δασκάλων είναι τα εξής:

Είναι οι υποψήφιοι δάσκαλοι/ες ικανοί να βρίσκουν διάφορους τρόπους για να παρουσιάζουν ένα πρόβλημα;

Είναι ικανοί να αξιολογούν τη δυσκολία που μπορεί να έχει ένα πρόβλημα για τους μαθητές σε σχέση με τον τρόπο παρουσιάσής του;

Είναι ικανοί να χαρακτηρίζουν διάφορες αναπαραστάσεις των αριθμητικών ποσοτήτων σύμφωνα με το βαθμό αφάιρεσής τους;

Γνωρίζουν πώς χρησιμοποιούμε τις διάφορες αυτές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία ανάλογα με τις ικανότητες των μαθητών;

Διακρίνουν το φαινόμενο της άμεσης εκτίμησης και γνωρίζουν τη χρησιμότητά του;

Ξέρουν να διακρίνουν τη λειτουργία των διάφορων υλικών (ξυλάκια, μονόχρωμο και δίχρωμο αριθμητήριο) στις διαδικασίες της αριθμησης;

## ΜΕΘΟΔΟΣ

### *Συμμετέχοντες*

Για να εξετάσουμε την ικανότητα εκτίμησης και χειρισμού των αναπαραστάσεων από τους υποψηφίους δασκάλους εξετάσαμε 42 φοιτητές/τριες του Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης της Παιδαγωγικής Σχολής Φλώρινας, 36 γυναίκες και 6 άνδρες. Η μεγάλη πλειοψηφία των φοιτητών βρίσκονταν στο ΣΤ΄ εξάμηνο και κάποιοι στο Η΄ εξάμηνο. Οι φοιτητές αυτοί είχαν διδαχθεί θεωρητικά μαθήματα Διδακτικής Μαθηματικών και Γνωστικής Ψυχολογίας και πραγματοποίησαν δύο φάσεις πρακτικής άσκησης κατά τις οποίες παρακολούθησαν και έκαναν διδασκαλίες σε όλα τα αντικείμενα του δημοτικού σχολείου.

### *Εργασία*

Η εξέταση των φοιτητών πραγματοποιήθηκε με ερωτηματολόγιο και διήρκεσε από 30΄ έως 45΄. Το ερωτηματολόγιο περιλάμβανε τέσσερις βασικές ερωτήσεις με διάφορα υποερωτήσεις. Οι ερωτήσεις δόθηκαν σε ανοικτή μορφή και η ανάλυση των απαντήσεων έγινε με τη μέθοδο της ανάλυσης περιεχομένου. Οι ερωτήσεις αυτές παρουσιάζονται στη συνέχεια.

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### *1<sup>η</sup> Ερώτηση: Αξιολόγηση της δυσκολίας ενός προβλήματος για τους μαθητές*

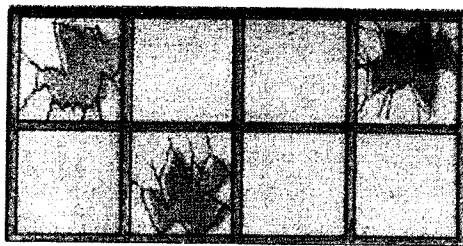
Δόθηκε στους φοιτητές μια ερώτηση όπως παρουσιάζεται στη συνέχεια: Στο βιβλίο της Α΄ τάξης, στο δεύτερο τεύχος, υπάρχει το παρακάτω πρόβλημα (βλ. Εικόνα 3). Το πρόβλημα αυτό είναι εύκολο ή δύσκολο για τους μαθητές; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Η πλειοψηφία του δείγματος (26 φοιτητές, 62%) απάντησε ότι το πρόβλημα θα είναι εύκολο για τους μαθητές. Αιτιολόγησαν την απάντησή τους με βάση το γεγονός ότι είναι εικονογραφημένο και οι μαθητές θα μπορούν εύκολα να βρουν την απάντηση επάνω στην εικόνα. Χαρακτηριστική απάντηση είναι η εξής: “Το πρόβλημα είναι εύκολο, γιατί τα παιδιά έχουν μπροστά τους την εικόνα και μπορούν να μετρήσουν και να υπολογίσουν”.

Υπήρχε, όμως, και ένα σημαντικό ποσοστό φοιτητών (14 φοιτητές, 33.5%) οι οποίοι απάντησαν ότι το πρόβλημα θα είναι δύσκολο για τους μα-



Το παράθυρο είχε 8 τζάμια. Μερικά από αυτά έσπασαν. Πόσα έμειναν γερά;



=  Απάντηση: Έμειναν γερά ... τζάμια

Εικόνα 3: Εκόνα προβλήματος από το σχολικό βιβλίο.

θητές. Δικαιολόγησαν την απάντησή τους κυρίως από το γεγονός ότι τα δεδομένα του προβλήματος στην εκφώνηση είναι ελλιπή και θα πρέπει οι μαθητές να τα βρουν διαβάζοντας την εικόνα. Η ανάγνωση της εικόνας θεώρησαν ότι θα μπερδέψει τους μαθητές. Χαρακτηριστική απάντηση είναι η εξής: «Είναι δύσκολο, γιατί δεν προσδιορίζει κατευθείαν από την εκφώνηση πόσα τζάμια έσπασαν, αλλά αφήνει τα παιδιά να παρατηρήσουν την εικόνα και να βγάλουν κάποια συμπεράσματα».

**2<sup>η</sup> Ερώτηση: Εύρεση διάφορων τρόπων παρουσίασης της εκφώνησης ενός προβλήματος και αξιολόγησης της δυσκολίας του προβλήματος στους μαθητές**

Τέθηκε στους φοιτητές η εξής ερώτηση: Στους μαθητές της Α΄ τάξης θέλουμε να θέσουμε το εξής πρόβλημα: «Έχω τέσσερις καραμέλες και η μαμά μου έδωσε άλλες τρεις. Πόσες θα είναι όλες;» Θέλουμε να παρουσιάσουμε το ίδιο πρόβλημα με τα ίδια δεδομένα, αλλά να μεταβάλουμε τον τρόπο παρουσίασης της εκφώνησης στους μαθητές. Με πόσους και ποιους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να παρουσιάσω την εκφώνηση στους μαθητές; Ποιοι από αυτούς τους τρόπους παρουσίασης θα είναι για τους αδύνατους και ποιοι για τους καλούς μαθητές;

Στο πρώτο σκέλος της ερώτησης, που ζητούσε τη μεταβολή της εκφώνησης, μόνον 20 φοιτητές (47.5%) κατάφεραν να απαντήσουν σωστά και να δώσουν διαφορετικούς τρόπους παρουσίασης της εκφώνησης. Από αυτούς οι 11 φοιτητές (26%) διαφοροποίησαν την εκφώνηση του προβλήματος ως προς τον τρόπο παρουσίασης των δεδομένων της εκφώνησης και 9 φοιτητές (21.5%) διαφοροποίησαν την εκφώνηση με αναδιατύπωση.

Οι 11 φοιτητές που έδωσαν διάφορους τρόπους παρουσίασης πρότειναν κατά μέσο όρο 3 διαφορετικούς τρόπους. Η πλειοψηφία των φοιτητών (9 φοιτητές) πρότεινε τις πραγματικές καραμέλες, 8 φοιτητές αναφέρθηκαν στις ζωγραφιές και το σχέδιο [ζωγραφιστές καραμέλες (2 φοιτητές), ζωγραφίζω στον πίνακα (3 φοιτητές), ζωγραφίζω σε χαρτόνι (1 φοιτητής), οι μαθητές να σχεδιάσουν (1 φοιτητής), σχηματική απεικόνιση που να συνοδεύεται με κάποια λόγια (1 φοιτητής)], τρεις φοιτητές αναφέρθηκαν στα ξυλάκια, τρεις φοιτητές στη δεδομένη εκφώνηση, τρεις στην προφορική εκφώνηση, δύο μόνο γραπτά, ένας φοιτητής στο αριθμητήριο, ένας στη συμβολική γραφή, ένας στη δραματοποίηση και ένας στον εμπλουτισμό της εκφώνησης.

Από τους 9 φοιτητές που προσπάθησαν να αναδιατυπώσουν το πρόβλημα χωρίς να αλλάξουν τα δεδομένα και την πράξη του προβλήματος, μόνον οι δύο κατάφεραν να διατυπώσουν εκφωνήσεις, οι οποίες είναι πραγματικά πιο δύσκολες από την δεδομένη εκφώνηση. Αυτές οι εκφωνήσεις ήταν οι εξής: «*Αν χάσεις 4 καραμέλες και την επόμενη μέρα χάσεις άλλες τρεις, πόσες θα έχεις χάσει συνολικά;*». «*Έχω 7 καραμέλες. Έχω 4 λιγότερες από τον Νίκο. Πόσες έχει ο Νίκος;*» Οι υπόλοιποι 7 από τους 9 φοιτητές διατύπωσαν εκφωνήσεις οι οποίες δε διέφεραν ως προς τη δυσκολία από τη δεδομένη εκφώνηση. Για παράδειγμα, τα προβλήματα που πρότεινε ένας φοιτητής ήταν τα εξής: 1) «*Έχω τέσσερις καραμέλες και η μαμά μου θα μου δώσει ακόμα τρεις. Πόσες καραμέλες θα έχω συνολικά; (για αδύνατους).* 2) «*Έχω τέσσερις καραμέλες τώρα μαζί μου. Αν αγοράσω άλλες τρεις, πόσες θα έχω μετά; (για πιο δυνατούς).*».

Άλλοι 9 φοιτητές (21.5%) έδωσαν απαντήσεις παραβιάζοντας τον περιορισμό που έλεγε να παρουσιαστεί το ίδιο πρόβλημα με τα ίδια δεδομένα. Έτσι, ή άλλαζαν τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος ή το μετέτρεπαν σε πρόβλημα αφαίρεσης. Οι περισσότεροι από αυτούς τους φοιτητές άλλαζαν τη σημασιολογική δομή του προβλήματος. Σε τέτοιες αλλαγές της σημασιολογικής δομής του προβλήματος είχαμε ασκήσει τους φοιτητές στο μάθημα της Διδακτικής των Μαθηματικών. Τέλος, τρεις φοιτητές έδωσαν απαντήσεις που κατατάσσονταν στην κατηγορία διάφορα, και 10 φοιτητές (24%) δεν έδωσαν καμία απάντηση.

Στο *δεύτερο σκέλος της ερώτησης* ζητήθηκε να αξιολογήσουν οι φοιτητές ποιοι από αυτούς τους τρόπους παρουσίασης θα ήταν για τους αδύνατους και ποιοι για τους καλούς μαθητές. Από τους 11 φοιτητές που πρότειναν διαφορετικούς τρόπους παρουσίασης οι 4 έκαναν ανεπαρκή εκτίμηση για τις ικανότητες των μαθητών. Για παράδειγμα, ένας φοιτητής έγραψε: «*Για την παρουσίαση του προβλήματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε καραμέ-*

λες, η δασκάλα να κάνει τη μαμά και ο μαθητής το παιδί. Μπορώ να το δώσω γραπτά σε συνδυασμό με τις καραμέλες ή μόνο προφορικά ή μόνο γραπτά. Για τους αδύνατους μαθητές θα χρησιμοποιούσα τις καραμέλες σε συνδυασμό με τη γραπτή μορφή ή μόνο γραπτά, για τους καλούς μαθητές θα ανακοίνωνα το πρόβλημα προφορικά». Η απάντηση αυτή του φοιτητή είναι 'ψυχολογικού περιεχομένου' και όχι 'διδασκτικού' διότι, πιθανώς, να θεωρεί ότι υπάρχει πρόβλημα μνήμης στους αδύνατους μαθητές σε αντίθεση με τους καλούς μαθητές στους οποίους αρκεί η προφορική παρουσίαση. Αυτό συνιστά μια διδακτικά ανεπαρκή, διαφορετικού τύπου εκτίμηση των ικανοτήτων των μαθητών. Από τους 9 φοιτητές που πραγματοποίησαν διαφορετική διατύπωση της εκφώνησης, οι 6 έκαναν κακή εκτίμηση για τις ικανότητες των μαθητών. Εδώ, την αδυναμία των φοιτητών να εκτιμήσουν σωστά τις ικανότητες των μαθητών ίσως την επιδεινώσε η δυσκολία που υπήρχε στην αναδιατύπωση του προβλήματος.

### **3<sup>η</sup> Ερώτηση: Χαρακτηρισμός της κατηγορίας στην οποία ανήκουν διάφορες αναπαραστάσεις και χρήση τους στη διδασκαλία**

Στο πρώτο σκέλος της ερώτησης αυτής ζητήθηκε από τους φοιτητές να χαρακτηρίσουν έξι διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης του αριθμού "5", οι οποίοι παρουσιάζονται παρακάτω (βλ. Εικόνα 1). Οι αναπαραστάσεις αυτές ήταν: Εικονικές αναπαραστάσεις πραγματικών αντικειμένων – δακτύλα (Α), παπαγάλια (Δ) -, συμβολικές αναπαραστάσεις – σε οργανωμένη μορφή (Ε) και σε μη οργανωμένη μορφή (Γ) -, και σημεία – ψηφίο (Β) και λέξη-αριθμός (Ζ).

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι όλοι οι φοιτητές διδάχτηκαν στο Β' εξάμηνο στα πλαίσια του μαθήματος της Διδακτικής των Μαθηματικών τι είναι σημείο, τι είναι σύμβολο και ποιες είναι οι διαφορές μεταξύ τους.

Για την αναπαράσταση των δακτύλων (Α), όπως βλέπουμε και στον Πίνακα 1, μόνο το 45% των φοιτητών έδωσε χαρακτηρισμό ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί αποδεκτός. Οι χαρακτηρισμοί αυτοί ήταν οι εξής: 7 φοιτητές (16.5%) τη χαρακτήρισαν ως 'σύμβολο', 5 φοιτητές (12%) τη χαρακτήρισαν ως 'εικόνα', τρεις φοιτητές (7%) ως 'παραστατικό τρόπο αναπαράστασης'. Τέλος, 4 φοιτητές έδωσαν καθένas έναν από τους παρακάτω χαρακτηρισμούς: 'εποπτική απεικόνιση', 'βιωματική', 'παρουσιάζει σχηματοποιημένα τον αριθμό 5', 'άμεσα αντιληπτός, απλά δε δηλώνεται αριθμός χωρίς μέτρηση'.

Την αναπαράσταση που παρουσιάζεται με την εικόνα των πέντε παπαγάλων (Δ), 27 φοιτητές (64%) τη χαρακτήρισαν με κάποια ακρίβεια. Η πλει-

Πίνακας 1. Συχνότητα χαρακτηρισμών των διάφορων αναπαράστάσεων (N = 42)

	A	Δ	Γ	Ε	B	Z
Αποδεκτοί χαρακτηρισμοί	19 (45%)	27 (64%)	2 (5%)	2 (5%)	14 (33.5%)	13 (31%)
Απλή περιγραφή	11 (26%)	—	12 (28.5%)	15 (35.7%)	14 (33.5%)	18 (43%)
Διάφορα	8 (19%)	11 (26%)	19 (35.5%)	18 (43%)	9 (21.5%)	5 (12%)
Όχι απάντηση	4 (9.5%)	4 (9.5%)	9 (21.5%)	7 (16.5%)	5 (12%)	6 (14%)

οψηφία από αυτούς (24 φοιτητές, 57%) χρησιμοποίησαν το χαρακτηρισμό 'εικόνα'.

Την αναπαράσταση σε μορφή συμβόλου με μη οργανωμένη μορφή (Γ), μόνο δύο φοιτητές (5%) τη χαρακτήρισαν σωστά, ο ένας φοιτητής τη χαρακτήρισε 'σύμβολο' και ο άλλος τη χαρακτήρισε 'συγκεκριμένο σύμβολο'. Άλλοι 12 φοιτητές (28.5%) περιέγραψαν απλώς την αναπαράσταση χαρακτηρίζοντάς την ως 'τελίτσες' ή 'κουκίδες' και 19 φοιτητές (35.5%) έδωσαν διάφορους χαρακτηρισμούς, οι οποίοι δεν ανταποκρίνονταν στη συγκεκριμένη περίπτωση: 'παραστατικό με τυχαία διάταξη' (δύο φοιτητές), 'τυχαία διάταξη', 'σχηματική', 'απαιτείται μέτρηση', 'αντικείμενο' (δύο φοιτητές), 'αυθαίρετος', 'συγκεκριμένος' (τρεις φοιτητές), κ.τ.λ. Από αυτούς οι 5 φοιτητές (12%) αναφέρθηκαν στην τυχαία διάταξη των κουκίδων. Ένα σημαντικό ποσοστό φοιτητών (21.5%) δεν έδωσε καμία απάντηση.

Τη συμβολική αναπαράσταση με οργανωμένη μορφή (Ε), μόνο δύο φοιτητές (5%) τη χαρακτήρισαν σωστά, ο ένας φοιτητής τη χαρακτήρισε 'σύμβολο' και ο άλλος τη χαρακτήρισε 'συγκεκριμένο σύμβολο'. Από τους 15 φοιτητές (35.7%) που έκαναν μια απλή περιγραφή αυτού που έβλεπαν, 7 φοιτητές (16.6%) χαρακτήρισαν την αναπαράσταση 'σύνολο' και 5 φοιτητές (12%) 'ζάρι'. Άλλοι 15 φοιτητές (43%) έδωσαν διάφορες απαντήσεις. Από αυτούς οι τρεις το ονόμασαν 'παραστατικό', δύο 'αντικείμενο', δύο 'συστοιχία', δύο 'συγκεκριμένο δομημένο', ενώ 5 από αυτούς (12%) έδωσαν μια γενική απάντηση χωρίς να αναφερθούν στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Το ψηφίο του πέντε με το τετράγωνο περίγραμμα (B), το οποίο ως αναπαράσταση είναι σημείο, μόνο δύο φοιτητές (5%) το ονόμασαν 'σημείο'. Άλλοι 12 φοιτητές (28.5%) το χαρακτήρισαν 'σύμβολο' ή 'αριθμητικό σύμβολο'. Το χαρακτηρισμό αυτό, τον θεωρούμε αποδεκτό με βάση την ανάλυση του Duval, ο οποίος στον όρο σύμβολο αποδίδει ένα ευρύτερο νόημα.

Από τους 14 φοιτητές που περιγράφουν αυτό που βλέπουν, οι 9 φοιτητές (21.5%) το χαρακτήρισαν 'αριθμό' και οι 5 φοιτητές (12%) 'κάρτα' ή 'κάρτα που απεικονίζει τον αριθμό πέντε'.

Για τη λέξη-αριθμό σε γραπτή μορφή (Z), η οποία σημειολογικά είναι ένα σημείο, 13 φοιτητές (31%) έδωσαν μια αποδεκτή απάντηση. Από αυτούς δύο φοιτητές τη χαρακτήρισαν 'σημείο', 6 φοιτητές (14%) 'σύμβολο' ή 'λεκτικό σύμβολο', 5 φοιτητές (12%) το χαρακτήρισαν 'λεκτική αναπαράσταση' ή 'λεκτικό'. Άλλοι 18 φοιτητές (43%) έκαναν μια απλή περιγραφή αυτού που έβλεπαν, χαρακτηρίζοντάς την ως 'λέξη', 'γραπτή', 'ολογράφως', κ.ά.

Στο δεύτερο σκέλος της ερώτησης ζητήθηκε από τους φοιτητές να περιγράψουν πώς χρησιμοποιούνται οι διάφορες αυτές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία ανάλογα με τις ικανότητες των μαθητών. Ένας σημαντικός αριθμός από 18 φοιτητές, το 43%, δεν έδωσαν καμμία απάντηση. Άλλοι 7 φοιτητές (16.5%) αναφέρθηκαν γενικά και όχι ειδικά στις 6 αναπαραστάσεις. Έλεγαν, για παράδειγμα, ότι είτε στην αρχή της διδασκαλίας είτε σε αδύνατους μαθητές θα χρησιμοποιήσουν εικόνες ή αντικείμενα και μετά, σε καλούς μαθητές, θα χρησιμοποιήσουν εικόνες, τη λεκτική αναπαράσταση ή πιο αφηρημένες αναπαραστάσεις.

Υπήρχαν 16 φοιτητές (38%) που έδωσαν απαντήσεις οι οποίες αναφέρονταν στις συγκεκριμένες αναπαραστάσεις. Οι απόψεις σχετικά με το ποιες αναπαραστάσεις θα πρέπει να δίνονται σε αδύνατους ή καλούς μαθητές ήταν ποικίλες. Έτσι είχαμε απαντήσεις όπως: 4 φοιτητές (9.5%) απάντησαν ότι οι αναπαραστάσεις (A), (Δ), (Γ), και (E) πρέπει να δίνονται στους αδύνατους μαθητές ενώ οι (B) και (Z) στους καλούς. Τρεις φοιτητές (7%) απάντησαν ότι οι αναπαραστάσεις (A), (Δ), (E) είναι για τους αδύνατους μαθητές, τρεις φοιτητές απάντησαν ότι οι (A) και (Δ) είναι για τους αδύνατους και οι (B), (Γ), (E) και (Z) για τους πιο καλούς. Δύο φοιτητές υποστήριξαν ότι οι αναπαραστάσεις (A), (Γ), και (Δ) είναι για τους αδύνατους και οι (B), (E) και (Z) για τους καλούς μαθητές.

Στο τρίτο σκέλος της ερώτησης ζητήθηκε από τους φοιτητές να συγκρίνουν τις δύο αναπαραστάσεις: τη (Γ) – κουκίδες – και την (E) – ζάρι. Επιλέξαμε αυτές τις δύο αναπαραστάσεις γιατί θέλαμε να εξετάσουμε αν γνωρίζουν οι φοιτητές ότι την οργανωμένη στο χώρο μορφή των κουκίδων (E), εξαιτίας του φαινομένου της άμεσης εκτίμησης, οι μαθητές τη χειρίζονται πιο εύκολα από ό,τι τις κουκίδες σε τυχαία διάταξη (Γ).

Οι φοιτητές στην πλειοψηφία τους επισήμαναν ότι η αναπαράσταση (E) θα είναι πιο εύκολη για τους μαθητές από την αναπαράσταση (Γ). Αυτή τη διαπίστωσή τους τη δικαιολόγησαν από το γεγονός ότι οι κουκίδες στο (E)

είναι οργανωμένες οπτικά και έτσι είναι πιο εύκολα αναγνώσιμες. Έλεγον ότι το (Ε) είναι ζάρι και οι μαθητές έχουν εμπειρία στη χρήση του ζαριού από την καθημερινή τους ζωή. Δώδεκα φοιτητές (28.5%) δεν έδωσαν καμία απάντηση στην ερώτηση αυτή.

#### **4<sup>η</sup> Ερώτηση: Επιλογή του υλικού της αρίθμησης για τη διδασκαλία**

Τέθηκε στους φοιτητές η εξής ερώτηση: *Ποιο από τα παρακάτω υλικά (βλ. Εικόνα 2) θα χρησιμοποιούσατε για να δείξετε σε μικρούς μαθητές της Α΄ τάξης αριθμούς όπως το 4, το 6, το 9, το 12, κ.τ.λ.; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

Στην ερώτηση αυτή η πλειοψηφία των φοιτητών (29 φοιτητές, 69%) απάντησαν ότι θα χρησιμοποιούσαν ως υλικό τα ξυλάκια για να δείξουν τους αριθμούς. Ο λόγος για τον οποίο θα χρησιμοποιούσαν τα ξυλάκια είναι κυρίως, όπως ανέφεραν, το ότι είναι απτά αντικείμενα από το φυσικό περιβάλλον του παιδιού. Έτσι, τα παιδιά θα μπορούν να τα χειριστούν με μεγαλύτερη ευχέρεια. Είναι χαρακτηριστική η παρακάτω απάντηση ενός φοιτητή: *«Θα χρησιμοποιούσα τα ξυλάκια τα οποία αποτελούν για τα παιδιά φυσικό αντικείμενο και απευθύνονται πιο πολύ από τα άλλα δύο στην πραγματικότητα των παιδιών».*

Μόνον 7 φοιτητές (16.5%) απάντησαν ότι θα χρησιμοποιούσαν το δίχρωμο αριθμητήριο. Οι φοιτητές αυτοί ανέφεραν, ως αιτιολογία του ότι θα χρησιμοποιούσαν το δίχρωμο αριθμητήριο, την καλύτερη εποπτεία που προσφέρει η διχρωμία του. Μια χαρακτηριστική απάντηση είναι η παρακάτω: *«Θα χρησιμοποιούσα το δίχρωμο αριθμητήριο γιατί οι μαθητές θα μπορούσαν να κατανοήσουν καλύτερα τους αριθμούς με την ποικιλία χρωμάτων που θα έχει το αριθμητήριο».* Δεν αναφέρθηκε όμως κανένας από αυτούς στη δομή με βάση το πέντε που προσφέρει η διχρωμία.

Άλλοι 4 φοιτητές (9.5%) απάντησαν ότι θα χρησιμοποιούσαν το μονόχρωμο αριθμητήριο. Οι λόγοι για τους οποίους επέλεξαν το μονόχρωμο αριθμητήριο είναι γιατί με το δίχρωμο αριθμητήριο θεωρούσαν ότι οι μαθητές θα μπερδευτούν. Μια χαρακτηριστική απάντηση ήταν η εξής: *«Το υλικό να είναι παρόμοιο (και όχι δίχρωμο αριθμητήριο) για να μην μπερδευτούν».*

Ένας φοιτητής ανέφερε ότι θα χρησιμοποιούσε συνδυασμό με ξυλάκια και μονόχρωμο αριθμητήριο, ενώ ένας άλλος ανέφερε ότι θα χρησιμοποιούσε το συνδυασμό και των τριών υλικών. Αυτός ο τελευταίος φοιτητής δικαιολόγησε πολύ σωστά την επιλογή του για κάθε ένα από τα υλικά που επέλεξε. Οι εξηγήσεις που έδωσε ήταν οι εξής: *«Το (α) θα το χρησιμοποιούσα για*

τη διδασκαλία του 4 και του 6. Το (β) θα το χρησιμοποιούσα για τη διδασκαλία του 6 και του 9 για να δείξουμε με το ένα χρώμα το 5 και με το άλλο πόσα χρειάζονται για το 6 και το 9. Το (γ) θα το χρησιμοποιούσα για τη διδασκαλία του 9 και του 12. Για να δείξουμε πόσα αφαιρούμε από το 10 για βρούμε 9. Πόσα προσθέτουμε στο 10 για να βρούμε 12».

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορούμε να διαπιστώσουμε γενικά ότι οι υποψήφιοι δάσκαλοι δε διαθέτουν τις απαραίτητες ικανότητες που απαιτούνται για τη διδασκαλία και που αναφέρονται στο χειρισμό και αξιολόγηση των διάφορων αναπαραστάσεων σε αριθμητικές ποσότητες.

Πιο συγκεκριμένα, δεν είναι όλοι οι υποψήφιοι δάσκαλοι ικανοί να αξιολογήσουν τη δυσκολία ενός προβλήματος για τους μαθητές με βάση τον τρόπο παρουσίασής του. Έτσι, ένα εικονογραφημένο πρόβλημα (1<sup>η</sup> ερώτηση) το οποίο είναι προφανές ότι είναι εύκολο για τους μαθητές, μόνο τα 2/3 των φοιτητών το αξιολογεί σωστά. Το υπόλοιπο 1/3 των φοιτητών κρίνει ότι το πρόβλημα αυτό θα είναι δύσκολο για τα παιδιά. Φαίνεται, δηλαδή, ότι κάποια πράγματα τα οποία θεωρούνται αυτονόητα, όπως στη συγκεκριμένη περίπτωση το ότι η παρουσία της εικόνας στην εκφώνηση ενός εύκολου προβλήματος κάνει προφανή τη λύση του, δεν είναι καθόλου αυτονόητα για έναν αρκετά μεγάλο αριθμό φοιτητών. Οι φοιτητές αυτοί δείχνουν σημαντική αδυναμία να εκτιμήσουν τις συμπεριφορές των μαθητών.

Οι υποψήφιοι δάσκαλοι παρουσιάζουν σημαντικές αδυναμίες στο να παρουσιάσουν με διαφορετικούς τρόπους ένα πρόβλημα. Μόνο το 30% από αυτούς είναι ικανοί να μεταβάλουν τον τρόπο παρουσίασης της εκφώνησης ενός προβλήματος και να παρουσιάσουν το πρόβλημα με τα ίδια δεδομένα αλλά με διαφορετική δυσκολία για τους μαθητές. Από αυτούς μόνο το 23% είναι ικανοί να κάνουν σωστή εκτίμηση των ικανοτήτων των μαθητών, σύμφωνα με τα προβλήματα που προτείνουν. Πολλοί φοιτητές κρίνουν λανθασμένα τη δυσκολία που παρουσιάζουν για τους μαθητές οι διάφοροι τρόποι αναπαράστασης ή παρουσίασης των αριθμητικών δεδομένων.

Στα αποτελέσματα της έρευνάς μας φάνηκε, επίσης, ότι είναι πολύ περιορισμένες οι ικανότητες των υποψήφιων δασκάλων να αναγνωρίζουν και να χαρακτηρίζουν τις διάφορες αριθμητικές αναπαραστάσεις με βάση το βαθμό αφαιρέσής τους. Στις πιο εύκολες περιπτώσεις καταφέρνουν μόλις οι μισοί φοιτητές να δώσουν ένα σωστό χαρακτηρισμό. Μόνον οι μισοί περίπου φοιτητές είναι ικανοί να διακρίνουν, κατά κάποιον τρόπο, ότι οι αναπα-

ραστάσεις που δείχνουν τα αντικείμενα, όπως αυτές με τα δάκτυλα (Α) και τους παπαγάλους (Δ), θα είναι εύκολες και θα μπορούν να τις χρησιμοποιήσουν και οι αδύνατοι μαθητές. Ενώ οι αναπαραστάσεις με τη γραπτή λέξη-αριθμό (Ζ) και το ψηφίο του πέντε (Β), που είναι πιο αφηρημένες, θα είναι για τους καλούς μαθητές.

Όσον αφορά την ικανότητα των υποψήφιων δασκάλων να διακρίνουν τη λειτουργία των διάφορων υλικών (ξυλάκια, δίχρωμο και μονόχρωμο αριθμητήριο) για τους μαθητές στις διαδικασίες της αρίθμησης, η πλειοψηφία των φοιτητών (70%), δείχνει την προτίμησή της στα ξυλάκια. Τα κριτήρια με τα οποία επιλέγουν οι φοιτητές το υλικό για την αρίθμηση είναι η εξοικείωση με τα αντικείμενα από την καθημερινότητα και τα έντονα χαρακτηριστικά της εποπτείας, όπως είναι το χρώμα, η ευκολία χειρισμού, κ.τ.λ. Δεν παρατηρούν και δεν επισημαίνουν όμως οι φοιτητές την οργανωμένη δομή στα αριθμητήρια, η οποία μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη μάθηση των αριθμών (Λεμονίδης, 2002).

Οι επιδόσεις αυτές των φοιτητών, ίσως, θα πρέπει να μας προβληματίσουν σε σχέση με το περιεχόμενο αλλά και τη διαδικασία της διδασκαλίας των αντίστοιχων μαθημάτων. Ίσως κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης των φοιτητών θα πρέπει να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ θεωρίας και πράξης. Διδάσκονται, δηλαδή, θεωρητικά μαθήματα για τη διδασκαλία, και υπονοείται ότι οι φοιτητές θα εφαρμόσουν άμεσα τη θεωρία αυτή στη διδασκαλία τους, πράγμα το οποίο η έρευνα αυτή μας δείχνει ότι δε συμβαίνει.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Bruning, R. H., Schraw, G. J., & Ronning, R. R. (1999). *Cognitive psychology and instruction*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Cuoco, A., & Curcio, F. (2001). *The roles of representation in school mathematics. Yearbook 2001*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Duval, R. (1988). Ecarts sémantiques et coherences mathématique [Σημασιολογική απόκλιση και μαθηματική συνάφεια]. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 1, 7-25.
- Duval, R. (1999). *Conversion et articulation des représentations analogiques*. [Μετατροπή και άρθρωση των αναλογικών αναπαραστάσεων]. Nord Pas de Calais, France: IUFM.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In NCTM (Ed.), *The roles of representation in school mathematics. Yearbook 2001* (p. 2). Reston, VA: NCTM.
- Gravenmeijer, K. P. E. (2000). Ένας διδακτικο-θεωρητικός συλλογισμός σχετικά με τη χρήση χειρισμών. Στο L. Streefland (Ed.), *Ρεαλιστικά μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση* (Ε. Κολέξα, Επιμ. Μετάφ.) (σ. 77-79). Αθήνα: Leader Books.
- Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.



- Lemonidis, C. (1991). Une analyse de la complexité cognitive de la notion d'homothétie [Μια ανάλυση της γνωστικής πολυπλοκότητας της έννοιας της ομοιοθεσίας]. *PEDAGOGIES. Cahiers du Laboratoire de Pédagogie Expérimentale de l'Université de Louvain*, 1, 71-79.
- Lemonidis, C. (υπό δημοσίευση). L'enseignement des premières notions arithmétiques selon l'analyse des différentes représentations des quantités. [Η διδασκαλία των πρώτων αριθμητικών εννοιών σύμφωνα με την ανάλυση των διαφορετικών αναπαραστάσεων των ποσοτήτων]. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*.
- Λεμονίδης, Χ. (1994). *Περίπατος στη μάθηση της στοιχειώδους αριθμητικής*. Θεσσαλονίκη: Κυριακίδης.
- Λεμονίδης, Χ. (2002). Μια νέα πρόταση διδασκαλίας στα μαθηματικά για τις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. *Θέματα στην Εκπαίδευση*, 3, 5-22.
- Λεμονίδης, Χ. (2003). Μια διαφορετική διδασκαλία για τους αριθμούς και τις πράξεις στην αρχή του σχολείου. *Γέφυρες*, (9), 22-29.
- Mandler, G., & Shebo, B. J. (1982). Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General*, 111, 1-22.
- Moyer, J. C., Sowder, L., Theradgill-Sowder, J., & Moyer, M. B. (1984). Story problem formats: Drawn versus verbal versus telegraphic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), 342-351.
- Piaget, J. (1951). *Play, dreams, and imitation in childhood*. New York: Norton.
- Riley, M. S. (1981). *Conceptual and procedural knowledge in development*. Unpublished Master's thesis, University of Pittsburgh.

## THE REPRESENTATION OF QUANTITIES IN ARITHMETIC NOTIONS AND THE CAPABILITY OF PRESERVICE TEACHERS TO USE THEM

*Charalambos Lemonidis*

*Aristotle University of Thessaloniki, Greece*

**Abstract.** In teaching mathematics, but also in many other objects of education, it is a common phenomenon to present a concept in various ways of representation. Teachers must be capable not only to recognize and to evaluate the various representations of a concept but also to manage them in the process of teaching. In this article, firstly, we analyze the different representations that can be used to present arithmetic quantities. Then we present a study that involved 42 students of the Department of Primary School Education, and aimed at examining their capabilities to evaluate and manipulate the various arithmetic quantity representations in situations that commonly occur during the teaching process. The results of the study indicate that students have serious difficulty in the manipulation and characterization of these representations.

**Key words:** Arithmetic quantities, Preservice training of teachers, Representations.

**Address:** Charalambos Lemonidis, Department of Primary Education, Florina School of Education, Aristotle University of Thessaloniki, 541 24 Thessaloniki, Greece. E-mail: lemonidi@eled-fl.auth.gr